TENTAMEN MECHANICA **5 februari 2004** **tijd: 14:00 - 17:00 uur**

MAAK **ELKE OPGAVE** OP EEN **APART BLAD** voorzien van je **naam** en **studentnummer**

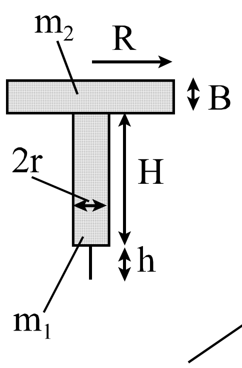
$$Cijfer = \sum punten/3 + 1$$

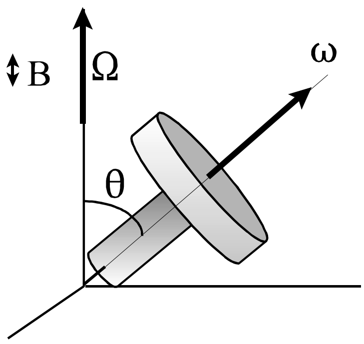
Opgave 1. Precessie van een tol

Een houten tol bestaat uit een cilindervormige steel met massa m_1. Bovenop de steel zit een breder stuk in de vorm van een schijf met massa m_2 (zie tekening). De tol staat op een korte, dunne pen met een verwaarloosbare massa. Voor de afmetingen van de tol geldt:

$R = 0{,}02\ m$; $B = 0{,}01\ m$; $H = 0{,}04\ m$;
$r = 0{,}005\ m$ en $h = 0{,}01\ m$.

De dichtheid van het hout is $\rho = 600\ kg/m^3$.





2p ☐ a. Bereken de massa's m_1 en m_2.

1p ☐ b. Bereken de positie van het zwaartepunt ten opzichte van de onderkant van de pen.

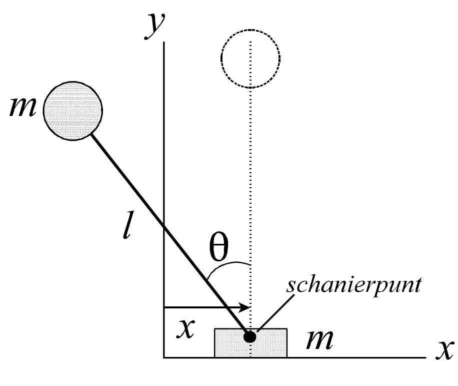
2p ☐ c. Bereken de traagheidsmomenten I_1 en I_2 van resp. de steel en de schijf ten opzichte van de symmetrie-as van de tol.

d. De tol draait met een hoeksnelheid ω om de symmetrie-as, terwijl die as een hoek θ maakt met de verticaal. Daardoor voert de as van de tol een precessie-beweging om de verticale-as uit met een hoeksnelheid Ω.

3p ☐ Bereken de hoeksnelheid Ω van de precessie-beweging, uitgedrukt in ω.

Opgave 2.

Een kogel met massa m is via een massaloze staaf met een lengte l scharnierend verbonden met een blokje, eveneens met massa m, dat wrijvingsloos langs de horizontale x-as kan bewegen. De horizontale verplaatsing van het blokje is x. Vanuit de verticale stand wordt de kogel een klein beetje uit z'n evenwicht gebracht. Daarna wordt het geheel vanuit rust losgelaten.



1p ☐ a. Bereken de potentiële energie van de kogel als functie van de hoek θ.

b. Op een gegeven moment heeft het blokje een (horizontale) snelheid $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ten opzichte van het stilstaande assenstelsel {x,y}. De hoeksnelheid van de vallende kogel is dan $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

1,5p ☐ Geef de horizontale en verticale component van de snelheid van de kogel uitgedrukt in $\dot{x}$ en $\dot{\theta}$.

1,5p ☐ c. Bereken de totale kinetische energie van het blokje en de kogel uitgedrukt in $\dot{x}$ en $\dot{\theta}$.

d. De Lagrangiaan is onafhankelijk van de positie x van het blokje.

2p ☐ Leid hieruit af dat er behoud van impuls is in de horizontale richting.

1p ☐ e. Geef de snelheid van **het blokje** vlak voor dat de kogel de grond raakt (dus als $\theta = \frac{\pi}{2}$) en beargumenteer je antwoord.

2p ☐ f. Bereken uit het behoud van energie de hoeksnelheid $\frac{d\theta}{dt}$ vlak voor dat de kogel de grond raakt.

>>>> Zie voor de overige opgaven de andere zijde van dit blad.

Enkele gegevens:
gravitatieconstante: $G = 6{,}67 . 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$
gemiddelde afstand zon-Aarde: $1{,}50 . 10^{11}\ m$
gemiddelde afstand zon-Venus: $1{,}08 . 10^{11}\ m$

Opgave 3.

Een meteoriet beschrijft een parabool-vormige baan rond de zon. Op weg naar de zon kruist de meteoriet eerst de baan van de Aarde in punt A. Daarna kruist de meteoriet in punt B de baan van Venus. In dit vraagstuk kan de potentiële-energie van de meteoriet ten opzichte van de Aarde en van Venus verwaarloosd worden.

3p ☐ Bereken de verhouding van de snelheden $\dfrac{v_A}{v_B}$ die de meteoriet heeft in de punten A en B en toon dit met een berekening aan:

A. $\dfrac{v_A}{v_B} = 0{,}85$

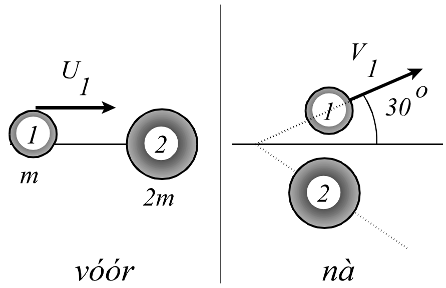
B. $\dfrac{v_A}{v_B} = 0{,}72$

C. $\dfrac{v_A}{v_B} = 0{,}52$

D. Deze verhouding is zonder extra gegevens niet te berekenen.

Opgave 4.

Kogel ① met massa m botst met een snelheid $\vec{u}_1$ op de stilstaande kogel ② met massa $2m$ (beide snelheden zijn gemeten in het laboratorium-stelsel). Na de botsing maakt de snelheid $\vec{v}_1$ van kogel ① een hoek van 30° met de oorspronkelijke bewegingsrichting.



1p ☐ a. Bereken de grootte van de snelheid van het zwaartepunt $\vec{V}_{CM}$ uitgedrukt in $\vec{u}_1$.

1,5p ☐ b. Bereken de snelheden $\vec{u}_1^{\,/}$ en $\vec{u}_2^{\,/}$ van beide kogels vóór de botsing **in het zwaartepunt-stelsel**, uitgedrukt in $\vec{u}_1$.

c. Ten gevolge van de botsing nemen beide snelheden in het zwaartepunt-stelsel af tot de helft van hun oorspronkelijke waarde. Dus: $v_1^{/} = \dfrac{1}{2}u_1^{/}$ en $v_2^{/} = \dfrac{1}{2}u_2^{/}$.

3p ☐ Bereken het energieverlies ten gevolge van de botsing, uitgedrukt in de totale kinetische energie vóór de botsing in het laboratorium-stelsel.

1,5p ☐ d. Bereken de grootte van de snelheid $\vec{v}_1$ van kogel ① nà de botsing in het laboratorium-stelsel.

1a. $m_1 = \pi r^2 H\rho = \pi.0{,}005^2.0{,}04.600 = 1{,}88.10^{-3}\ kg$

$m_2 = \pi R^2 B\rho = \pi.0{,}02^2.0{,}01.600 = 7{,}54.10^{-3}\ kg$

1b. $R_{CM} = \dfrac{m_1(0{,}01 + 0{,}04/2) + m_2(0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}01/2)}{m_1 + m_2} = 0{,}05\ m$

1c. $I_1 = \dfrac{1}{2}m_1 r^2 = \dfrac{1}{2}.1{,}885.10^{-3}.0{,}005^2 = 2{,}36.10^{-8}\ kgm^2$

$I_2 = \dfrac{1}{2}m_2 R^2 = \dfrac{1}{2}.7{,}54.10^{-3}.0{,}02^2 = 1{,}51.10^{-6}\ kgm^2$

1d. Het krachtmoment is: $N = (m_1 + m_2)gR_{CM}\sin\theta = 4{,}62.10^{-3}.\sin\theta$

De verandering van het impulsmoment is: $\Omega(I_1 + I_2)\omega\sin\theta = \omega\Omega.1{,}53.10^{-6}.\sin\theta$

Zodat $\Omega = \dfrac{4{,}62.10^{-3}}{1{,}53.10^{-6}}.\dfrac{1}{\omega} = 3{,}0.10^3.\dfrac{1}{\omega}$

2a. $U = mgl\cos\theta$

2b. De horizontale component is: $\dot{x} - l\dot{\theta}\cos\theta$

de verticale component is: $l\dot{\theta}\sin\theta$

2c. $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} - l\cos\theta.\dot{\theta})^2 + (l\sin\theta.\dot{\theta})^2] = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - ml\cos\theta.\dot{x}.\dot{\theta}$

2d. Omdat de Lagrangiaan onafhankelijk is van x volgt: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) = 0$ zodat $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}} = constant$.

Dus $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 2m\dot{x} - ml\cos\theta\,\dot{\theta} = constant = 0$. Dit komt overeen met behoud van impuls in de horizontale richting immers $p_{blokje} = m\dot{x}$ en $p_{kogel} = m\dfrac{d}{dt}(x - l\sin\theta) = m\dot{x} - ml\cos\theta\,\dot{\theta}$

e. Uit behoud van impuls volgt met $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ dat $\dot{x} = 0$. (De kogel heeft alleen een verticale snelheid-component, dan staat het blokje dus stil).

f. De kinetische energie is dan $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$.

Uit behoud van energie volgt dan $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = mgl$ zodat $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}$.

3. Omdat de meteoriet een parabool-baan beschrijft, is de totale energie nul. Daardoor is de kinetische energie is gelijk aan de (absolute waarde) van de potentiele energie, die omgekeerd evenredig is met de afstand. Dus: $\dfrac{v_A}{v_B} = \sqrt{\dfrac{R_B}{R_A}} = 0{,}85$

4a. $\vec{V}_{CM} = \dfrac{m.\vec{u}_1 + 2m.0}{m + 2m} = \dfrac{1}{3}\vec{u}_1$

4b. $\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{V}_{CM} = \dfrac{2}{3}\vec{u}_1$ en $\vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{V}_{CM} = -\dfrac{1}{3}\vec{u}_1$

4c. De zwaartepuntsenergie blijft behouden. De kinetische energie in het zwaartepuntsstelsel voor de botsing is: $T' = \frac{1}{2}.m.(\frac{2}{3}u_1)^2 + \frac{1}{2}.2m.(\frac{1}{3}u_1)^2 = \frac{1}{3}mu_1^2$

De snelheden in het zwaartepuntsstelsel na de botsing zijn de helft van die voor de botsing. Dan wordt de kinetische energie na de botsing 1/4 van de kinetische energie voor de botsing. Het verlies is derhalve:
$\Delta T' = \frac{3}{4}.\frac{1}{3}mu_1^2 = \frac{1}{4}mu_1^2$

4d. Uit $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{V}_{CM}$ volgt: $v_1\sin(30) = \frac{1}{3}u_1\sin(60)$ zodat $v_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}u_1$